

# RELATIONS DE COMPARAISON.

Notations (rappels) :

1. « On a  $P(n)$  APCR » signifie :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(n)$ ;
2. Pour  $a$  fini, « on a  $P(x)$  au voisinage de  $a$  » signifie :  $\exists \epsilon > 0, \forall x \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[, P(x)$ ;
3. Pour  $a = +\infty$ , « on a  $P(x)$  au voisinage de  $a$  » signifie :  $\exists A > 0, \forall x \in ]A, +\infty[, P(x)$ ;
4. Pour  $a = -\infty$ , « on a  $P(x)$  au voisinage de  $a$  » signifie :  $\exists B < 0, \forall x \in ]-\infty, B[, P(x)$ .

## I Domination

La relation de domination est le «  $\mathcal{O}$  » (lire "grand O") utilisé en complexité.

### I.1 Définitions

*Définition 1 : Domination pour les suites.*

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

1. Si  $(v_n)_n$  ne s'annule pas, on dit que  $(u_n)_n$  est dominée par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $\left(\frac{|u_n|}{|v_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.
2. Plus généralement, on dit que  $(u_n)_n$  est dominée par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsqu'on a  $\exists K \geq 0, |u_n| \leq K|v_n|$  APCR.

Lorsque c'est le cas, on note  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .

#### Exemples 1

1. On a  $n = \mathcal{O}(n^2)$  car  $\left(\frac{n}{n^2}\right)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est bornée (par exemple par 1).
2. On a  $5n + 12 = \mathcal{O}(n)$  car  $\left(\frac{5n + 12}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(5 + \frac{12}{n}\right)_{n \geq 1}$  est majorée (par exemple par 17).

**Exercice 1.** Pourquoi la seconde définition est-elle bien une généralisation de la première ?

#### Exemples 2

1. A-t-on  $n^2 = \mathcal{O}(n)$  ?

$$\left(\frac{|n^2|}{|n|}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (|n|)_{n \in \mathbb{N}^*} = \text{id}_{\mathbb{N}^*} \rightarrow \infty \implies \text{pas majorée} \implies \text{non !}$$

2. A-t-on  $n = \mathcal{O}(5n + 12)$  ?

#### Méthode 1

$$\left(\frac{n}{5n + 12}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{5 + \frac{12}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \leq \frac{1}{5} \implies \text{oui}$$

**Notation 1**

1. On a vu qu'on note  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  pour «  $(u_n)_n$  est dominée par  $(v_n)_n$  ».
2. On notera aussi  $\mathcal{O}(v_n)$  l'ensemble de toutes les suites dominées par  $(v_n)_n$ .
3. On notera aussi  $u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$  pour  $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$ .

**Exemple 3 :** On a  $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Expliquer pourquoi.

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \left( \left| \frac{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \right| \right)_{n \geq 2} = \left( \left| \frac{1}{n(n-1)} \right| \left| \frac{n^2}{1} \right| \right)_{n \geq 2} \rightarrow 1 \Rightarrow \left( \frac{u_n - v_n}{w_n} \right)_n \text{ est bornée}$$

**Définition 2 : Domination pour les fonctions.**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  un point adhérent à  $I$ .

1. Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , on dit que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  lorsque  $\left(\frac{|f|}{|g|}\right)$  est majorée au voisinage de  $a$ .
2. En général, on dit que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'on a  $\exists K \geq 0, |f| \leq K|g|$  au voisinage de  $a$ .

Lorsque c'est le cas, on note  $f = \mathcal{O}_a(g)$  (ou, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté sur  $a$  :  $f = \mathcal{O}(g)$ ).

On peut également noter  $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$ . On reprend aussi les deux autres notations vues pour les suites.

**Exemples 4**

1. A-t-on  $x = \mathcal{O}_0(x^2)$ , a-t-on  $x^2 = \mathcal{O}_0(x)$ , les deux, aucun des deux ?
  - $\left(\left|\frac{x}{x^2}\right|\right)_0 = \left(\left|\frac{x}{x^2}\right|\right)_0 \rightarrow +\infty$  donc  $\left(\left|\frac{x}{x^2}\right|\right)_0$  n'est pas majorée
  - $\left(\left|\frac{x^2}{x}\right|\right)_0 = (x)_0 \rightarrow 0$  donc  $\left(\left|\frac{x^2}{x}\right|\right)_0$  est bornée
2. A-t-on  $x = \mathcal{O}_{+\infty}(x^2)$ , a-t-on  $x^2 = \mathcal{O}_{+\infty}(x)$ , les deux, aucun des deux ?

**I.2 Propriétés**

Dans cette section, on énonce quelques propriétés de la domination. Comme le cas des suites est essentiellement un cas particulier du cas des fonctions (pour  $a = +\infty$ ), on se contente d'énoncer les résultats pour les fonctions, mais ils restent évidemment vrais pour les suites.

**Proposition 1 .**

La relation de domination (« est dominé par ») est un préordre.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I}$ . Montrons que  $f = \mathcal{O}_a(f)$ . Posons  $K = 1$ . On a bien  $|f| \leq K|f|$  ie  $|f| \leq |f|$  au voisinage de  $a$  (et même tout court).

Donc  $\cdot = \mathcal{O}(\cdot)$  est réflexive

Soit  $f, g, h \in \mathbb{R}^I$ . Soit  $a \in \bar{I}$ . Supposons  $\begin{cases} f = \mathcal{O}_a(g) \\ g = \mathcal{O}_a(h) \end{cases}$ . Il existe  $K_1, K_2 \geq 0$  tels que :

$$\begin{cases} |f| \leq K_1|g| & \text{au voisinage de } a & (1) \\ |g| \leq K_2|f| & \text{au voisinage de } a & (2) \end{cases}.$$

Une intersection de voisinages est un voisinage donc les deux inéquations sont vraies pour un même voisinage de  $a$ .  $K_1 \geq 0$  donc on multiplie (2) par  $K_1$ . On a  $K_1|g| \leq K_1K_2|f|$  au voisinage de  $a$  donc  $|f| \leq K_1K_2|f|$  au voisinage de  $a$ . Posons  $K = K_1K_2 \geq 0$ . On a bien

$$|f| \leq K|h| \quad \text{au voisinage de } a \text{ ie } f = O_a(h).$$

□

**Théorème 1 : Propriétés algébriques de la domination.**

La relation de domination

1. absorbe les constantes : si  $\lambda \neq 0$  alors  $\mathcal{O}_a(\lambda f) = \mathcal{O}_a(f)$  ;
2. est stable par somme au sens suivant : si  $f = \mathcal{O}_a(u)$  et  $g = \mathcal{O}_a(v)$  alors  $f + g = \mathcal{O}_a(|u| + |v|)$  ;
3. est stable par produit : si  $f = \mathcal{O}_a(u)$  et  $g = \mathcal{O}_a(v)$  alors  $fg = \mathcal{O}_a(uv)$ .

**Exercice 2.** Le montrer.

**Remarque 1**

Le point 2. est surtout intéressant pour son cas particulier suivant :  $\text{si } f = \mathcal{O}_a(u) \text{ et } g = \mathcal{O}_a(u) \text{ alors } f + g = \mathcal{O}_a(u)$ .

**Exemple 5**

On montre facilement que les suites  $(\arctan(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\frac{2n^2+5}{n^2+n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont toutes dominées par  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ . Avec le point 3., on déduit  $\arctan(n)e^{-n} = \mathcal{O}(1)$ , puis, avec le corollaire du point 2.,  $\arctan(n)e^{-n} + \frac{2n^2+5}{n^2+n+1} = \mathcal{O}(1)$ .

**Proposition 2 : Grands O de 0 et de 1.**

1.  $f = \mathcal{O}_a(1) \Leftrightarrow f$  est bornée au voisinage de  $a$
2.  $f = \mathcal{O}_a(0) \Leftrightarrow f = x \mapsto 0$  au voisinage de  $a$

**DÉMONSTRATION.** Il suffit décrire la définition.

□

**Corollaire 1 : Zone rouge.**

Si on est amené à écrire  $u_n = \mathcal{O}(0)$  ou  $f = \mathcal{O}(0)$ , c'est très probablement qu'on a fait une erreur!

On en prend acte et on essaie de comprendre où on s'est trompé, on ne laisse pas une horreur pareille sur la copie.

## II Négligeabilité

La relation de négligeabilité correspond aux  $x^n \varepsilon(x)$  des DL. Cela va se noter avec des « o » (lire "petit o").

### II.1 Définitions

**Définition 3 : Négligeabilité pour les suites.**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

1. Si  $(v_n)_n$  ne s'annule pas, on dit que  $(u_n)_n$  est négligeable devant  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsqu'on a  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ .
2. En général, on dit que  $(u_n)_n$  est négligeable devant  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $\begin{cases} u_n = \varepsilon_n v_n \text{ APCR} \\ \varepsilon_n \rightarrow 0. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note  $u_n = o(v_n)$ .

**Exemples 6**

1. On a  $n = o(n^2)$  car  $\left(\frac{n}{n^2}\right)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  tend bien vers 0.
2. On a  $5n + 12 \neq o(n)$  car  $\left(\frac{5n + 12}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(5 + \frac{12}{n}\right)_{n \geq 1}$  ne tend pas vers 0.

**Exercice 3.** Pourquoi la seconde définition est-elle bien une généralisation de la première ?

**Notation 2**

1. On a vu qu'on note  $u_n = o(v_n)$  pour «  $(u_n)_n$  est négligeable devant  $(v_n)_n$  ».
2. On notera aussi  $o(v_n)$  l'ensemble de toutes les suites dominées par  $(v_n)_n$ .
3. On notera aussi  $u_n = v_n + o(w_n)$  pour  $u_n - v_n = o(w_n)$ .

**Exemple 7 :** On a  $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Expliquer pourquoi.

$$\left(\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)n\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} = \left(\frac{n}{n-1} - 1\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \rightarrow 1 - 1 = 0.$$

*Définition 4 : Négligeabilité pour les fonctions.*

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  un point adhérent à  $I$ .

1. Si  $g \neq 0$  au voisinage de  $a$ , on dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'on a  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
2. En général, on dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'il existe  $\varepsilon : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varepsilon(x) \end{cases}$  telle que  $\begin{cases} f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note  $f = o_a(g)$  (ou, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté sur  $a$  :  $f = o(g)$ ).

On peut également noter  $f(x) = o_a(g(x))$ . On reprend aussi les deux autres notations vues pour les suites.

**Exemple 8** Le DL à l'ordre 3 de  $\sin(x)$  en 0 peut s'écrire  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ .

**II.2 Négligeabilités classiques**

*Proposition 3 .*

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $a, b > 0$ .

1.  $x^\alpha = o_{+x \rightarrow \infty}(x^\beta) \Leftrightarrow \frac{\text{id}^\alpha}{\text{id}^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{id}^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \beta > \alpha$
2.  $x^\alpha = o_0(x^\beta) \Leftrightarrow \text{id}^{\alpha-\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta$
3.  $a^x = o_{+\infty}(b^x) \Leftrightarrow \frac{a^x}{b^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow b > a$

*Théorème 2 : Croissances comparées.*

Pour  $\alpha, \beta > 0$  : 1.  $x^\alpha = o_{+\infty}(e^{\beta x})$     2.  $\ln(x)^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$     3.  $e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$     4.  $\ln(x)^\beta = o_{0+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Ce théorème est une simple **reformulation** des théorèmes de croissance comparée vus dans le cours sur les fonctions usuelles. Nous l'avons donc déjà démontré.

**Théorème 3 : Cas des suites.**

Soient  $\alpha, \beta > 0$  et  $q > 1$ . On a :    1.  $n^\alpha = o(q^n)$     2.  $\ln(n)^\alpha = o(n^\beta)$     3.  $q^n = o(n!)$     4.  $n! = o(n^n)$

**DÉMONSTRATION.**  $q^n = e^{n \ln q} := e^{\beta n}$  En posant  $\beta := \ln q > 0$  D'après le théorème 2,  $n^\alpha = o(e^{\beta n})$  ie  $n^\alpha = o(q^n)$   
D'après le point 2 du théorème 2, OK

$q^n = o(n!)$  se reformule  $\frac{q^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On a

$$\frac{q^n}{n!} = \frac{q \times q \times q \times \dots \times q}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}.$$

Pour  $n > q$  (càd  $n > \lfloor q \rfloor$ ). On a :

$$\frac{q \times \dots \times q}{1 \times \dots \times \lfloor q \rfloor \times \lfloor q \rfloor + 1 \times \dots \times (n-1) \times n} \leq.$$

□

**II.3 Propriétés**

Dans cette section, on énonce pour les fonctions des propriétés de la négligeabilité, bien sûr valables pour les suites.

**Proposition 4.**

La relation de négligeabilité ( $\ll$  est négligeable devant  $\gg$ ) est transitive.

**Théorème 4 : Propriétés algébriques de la négligeabilité.**

La relation de négligeabilité

1. absorbe les constantes : si  $\lambda \neq 0$  alors  $o_a(\lambda f) = o_a(f)$  ;
2. est stable par somme :
  - i/ si  $f = o_a(u)$  et  $g = o_a(v)$  alors  $f + g = o_a(|u| + |v|)$  ;
  - ii/ si  $f = o_a(u)$  et  $g = o_a(u)$  alors  $f + g = o_a(u)$  ;
3. est stable par produit :
  - i/ si  $f = o_a(u)$  et  $g = o_a(v)$  alors  $fg = o_a(uv)$  ;
  - ii/ si  $f = o_a(u)$  alors  $fg = o_a(ug)$ .

**Exercice 4.** Le montrer.

**Application 1** Ces propriétés reformulent des résultats utilisés en TACMAS.

Écrites avec le symbole  $o$ , elles permettent (enfin ?) de mener agréablement des calculs de DL.

• Par exemple, soit à calculer le  $DL_3(0)$  de  $\sin(2x)$ . Comme  $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on peut écrire  $\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(8x^3)$ . Mais comme les « petit o » absorbent les constantes, on peut passer sans autre forme de procès de cette ligne à  $\sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$ .

• Soit à calculer le  $DL_3(0)$  de  $\ln(1+x)\sin(x)$ . On a  $\ln(1+x)\sin(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \dots$ . Les termes restant dans les  $\dots$  sont soit de la forme  $\lambda x^n$  avec  $n \geq 4$ , donc des  $o(x^3)$ , soit des produits d'un  $o(x^3)$  par une expression bornée, qui sont aussi des  $o(x^3)$  par stabilité par produit. Les  $\dots$  sont donc une somme de  $o(x^3)$ , et comme les « petit o » sont stables par somme, c'est un  $o(x^3)$ , ce qu'on peut écrire directement sans autre forme de procès.

**Proposition 5 : Petits o de 0 et de 1.**

1.  $f = o_a(1) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
2.  $f = o_a(0) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

**DÉMONSTRATION.** Il suffit d'écrire la définition. □

**Corollaire 2 : Zone rouge.**  
Si on est amené à écrire  $u_n = o(0)$  ou  $f = o(0)$ , c'est très probablement qu'on a fait une erreur !

On en prend acte et on essaie de comprendre où on s'est trompé, on ne laisse pas une telle infamie sur la copie.

### III Équivalence

On sait que, par exemple, quand  $x$  est proche de 0, on a  $\sin(x)$  très proche de  $x$ . Les physiciens et les Slistes ne se gênent pas pour remplacer l'un par l'autre. On va ici donner un sens précis à cette relation.

#### III.1 Définitions

**Définition 5 : Équivalence pour les suites.**  
Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

1. Si  $(v_n)_n$  ne s'annule pas, on dit que  $(u_n)_n$  est équivalente à  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsqu'on a  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ .
2. En général, on dit que  $(u_n)_n$  est équivalente à  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $\exists (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \begin{cases} u_n = \gamma_n v_n \text{ APCR} \\ \gamma_n \rightarrow 1. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note  $u_n \sim v_n$ .

**Exemple 9** On a  $3^n - 2^n + \cos(n) \sim 3^n$ . En effet, on a  $\frac{3^n - 2^n + \cos(n)}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\cos(n)}{3^n} \rightarrow 1$ .

**Exercice 5.** Pourquoi la seconde définition est-elle bien une généralisation de la première ?

#### Exemples 10

1. On a vu en TD que la  $n^{\text{ième}}$  intégrale de Wallis  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$  vérifie  $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .
2. On peut voir avec Cesàro qu'on a  $y_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$  pour  $y_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \sin(y_n)$ .

**Définition 6 : Équivalence pour les fonctions.**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  un point adhérent à  $I$ .

1. Si  $g$  NSP au voisinage de  $a$ , on dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'on a  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ .
2. En général, on dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'il existe  $\varepsilon : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \gamma(x) \end{cases}$  telle que  $\begin{cases} f(x) = \gamma(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1. \end{cases}$

Lorsque c'est le cas, on note  $f \sim_a g$  (ou  $f \sim g$ , ou  $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ ).

**Exemple 11** On a  $\sin(x) \sim x$  puisqu'on a  $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

**Remarque 2**

L'intérêt de la relation d'équivalence est de calculer des équivalents simples pour simplifier l'étude en cours. Un équivalent qui se présente comme une somme n'est certainement pas un équivalent simple, donc est sans intérêt en tant qu'équivalent.

**III.2 Équivalents classiques**

**Proposition 6 : Équivalent d'une fraction rationnelle en 0 et  $\pm\infty$ .**

Soient  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_{n_0} x^{n_0}$  ( $a_n, a_{n_0} \neq 0$ ) et  $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_{m_0} x^{m_0}$  ( $b_m, b_{m_0} \neq 0$ ) deux polynômes.

1.  $\frac{P(x)}{Q(x)} \sim_{\pm\infty}$  .....
2.  $\frac{P(x)}{Q(x)} \sim_0$  .....

**DÉMONSTRATION.** • En  $\pm\infty$  :

• En 0 :

□

**Remarque 3**

En particulier, pour un polynôme  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_{n_0} x^{n_0}$  ( $a_n, a_{n_0} \neq 0$ ), on obtient :

*Définition 7 : Série harmonique.*

On note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . La suite  $(H_n)_n$  s'appelle la série harmonique.

*Proposition 7 : Série harmonique.*

On a  $H_n \sim \ln(n)$ .

Avertissement : ce théorème n'est pas en toute lettres dans le programme<sup>1</sup> mais les concours font comme si.

**DÉMONSTRATION.** De nombreuses méthodes existent. L'idéal serait de comprendre d'où ça sort. Une idée ?

---

1. C'est un cas particulier d'un théorème du programme que l'on verra plus tard.



□

*Théorème 5 : Formule de Stirling.*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ok, c'est quoi cette formule de dingue ? D'où il sort ce  $2\pi$  ? Et ce  $e (= \exp(1))$  ? Non mais c'est un truc de ouf malade !

**DÉMONSTRATION.** Bon, on n'a pas assez de background. Admis provisoirement. Ça nous fait au moins une bonne raison de faire le cours sur les séries. On pourra voir l'application 2 pour voir comment on utilise la formule. □

### III.3 Propriétés

Dans cette section, on énonce pour les fonctions des propriétés de l'équivalence, bien sûr valables pour les suites.

#### *Proposition 8 .*

La relation d'équivalence (« est équivalente à ») est... une relation d'équivalence. Eh oui.

DÉMONSTRATION.

□

#### *Théorème 6 .*

Deux fonction équivalentes ont, sous réserve d'existence, même limite et même signe au voisinage de  $a$ .

DÉMONSTRATION. Exercice.

Mais on peut faire immédiatement l'exercice INP  $n^\circ 1$  qui nous demande de le démontrer pour des suites.

□

#### *Théorème 7 : Propriétés algébriques de l'équivalence.*

La relation d'équivalence

1. est stable par produit : si  $f \sim u$  et  $g \sim v$  alors  $fg \sim uv$  ;
2. est stable par quotient : si  $f \sim u$ ,  $g \sim v$  et  $v$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{f}{g} \sim \frac{u}{v}$  ;
3. est stable par puissance constante : si  $f \sim g$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors  $f^\alpha \sim g^\alpha$ .

DÉMONSTRATION. On se contente du cas où les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de  $a$  :

□

En cas particulier du point 1., si  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \sim g$ , alors  $\lambda f \sim \lambda g$ .

/!\ Attention!

1. Si  $\alpha$  n'est pas constant, ça ne marche pas! Donner un contre-exemple :
2. Les équivalents ne sont pas stables par somme! Donner un contre-exemple :
3. Les équivalents ne sont pas stables par passage à l'exponentielle! Donner un contre-exemple :

**Application 2**

Donner un équivalent simple de  $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ . En déduire sa limite.

*Proposition 9 : Équivalents constants.*

1. Si  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ,  $f \sim_a \ell \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

2.  $f \sim_a 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

DÉMONSTRATION. Il suffit décrire la définition. □

*Corollaire 3 : Zone rouge.*

Si on est amené à écrire  $u_n \sim 0$  ou  $f \sim 0$ , c'est très probablement qu'on a fait une erreur!

On en prend acte et on essaie de comprendre d'où vient le bug, on ne laisse pas ce genre d'atrocités sur la copie.

**III.4 Lien avec la négligeabilité.**

Cette sous-section est essentielle pour bien comprendre la section suivante.

*Théorème 8 : lien avec la négligeabilité.*

$$\begin{aligned} f \sim_a g &\Leftrightarrow f = g + o_a(g) \\ &\Leftrightarrow f = g + o_a(f) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

Comme l'équivalence est une relation d'équivalence (donc symétrique), il suffit de montrer la première équivalence<sup>2</sup>.

On traite seulement le cas des fonctions qui ne s'annulent pas.

---

2. Ça fait beaucoup de notions d'équivalence cette histoire.

□

On a déjà vu que si  $f$  a un  $DL_n(0)$ , celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n_0}x^{n_0} + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

**Corollaire 4 .**

Tout DL est équivalent à son premier terme non nul s'il en existe un.

Autrement dit si  $a_{n_0}$  est le premier  $a_i$  non nul dans l'expression précédente, alors  $f(x) \sim_0 a_{n_0}x^{n_0}$ .

DÉMONSTRATION.

□

**Application 3**

On retrouve  $\sin(x) \sim_0 x$  car .....

On obtient de même :

$\ln(1 + x) \sim_0$  .....

$\arctan(x) \sim_0$  .....

$\cos(x) - 1 \sim_0$  .....

etc.

## IV Développements asymptotiques

L'idée est la suivante : un DL donne **strictement** plus d'information qu'un équivalent.

Par exemple de  $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , on déduit  $\text{sh}(x) \sim_0 x$ , mais on a aussi  $\text{sh}(x) \sim_0 x + \frac{x^2}{42}$ , et le  $\frac{x^2}{42}$  est un pur parasite ne donnant aucune information<sup>3</sup> sur  $\text{sh}(x)$ .

On va maintenant généraliser la notion de développement limité.

### Définition 8 : Développement asymptotique.

On notera DA pour « développement asymptotique ».

1. On appelle DA à un terme de  $f$  en  $a$  une expression de la forme  $f = g + o_a(g)$  où  $g$  est un équivalent **simple**<sup>a</sup> de  $f$ .
2. On appelle DA à deux termes de  $f$  en  $a$  une expression de la forme  $f = g + h + o_a(h)$  où :
 
$$\begin{cases} g \text{ est un équivalent simple de } f ; \\ h \text{ est un équivalent simple de } f - g. \end{cases}$$
3. On appelle DA à trois termes de  $f$  en  $a$  une expression de la forme  $f = g + h + u + o_a(u)$  où :
 
$$\begin{cases} g \text{ est un équivalent simple de } f ; \\ h \text{ est un équivalent simple de } f - g ; \\ u \text{ est un équivalent simple de } f - g - h. \end{cases}$$

Et cætera.

a. Vu le lien équivalence/négligeabilité, c'est nécessairement un équivalent de  $f$ .

Que veut-on dire par « simple » ? Pas grand-chose et cela relèvera du bon sens lorsqu'on a à effectuer un DA. Évidemment les monômes ( $x \mapsto x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) sont les fonctions les plus simples de la galaxie, ce sont eux qu'on privilégiera si possible ; ensuite viennent les autres  $x \mapsto x^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , puis (en  $+\infty$ )  $\ln$ ,  $\exp$  et les autres  $x \mapsto x^\alpha$ , puis les produits de fonctions précédentes. En général on n'a besoin de rien d'autre (jusqu'au jour où...).

**Exemple 12** Les développements limités sont les plus simples des développements asymptotiques, ceux pour lesquels tous les termes utilisés sont des monômes.

**Exemple 13** Un développement asymptotique à trois termes de la suite  $\left(\frac{1}{n-1}\right)_n$  est  $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

1. On peut le voir à la main :
  - i/ un équivalent simple de  $\frac{1}{n-1}$  est assurément  $\frac{1}{n}$  ;
  - ii/ un équivalent simple de  $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$  est assurément  $\frac{1}{n^2}$  ;
  - iii/ un équivalent simple de  $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$  est assurément  $\frac{1}{n^3}$ .
2. On peut le voir à l'aide d'un changement de variable qui nous ramène à un DL : ce sera souvent le cas (hélas pas toujours). On pose  $X = \frac{1}{n}$ , on a  $X \rightarrow 0$  et donc :
 
$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(1-1/n)} = \frac{1}{n} \frac{1}{1-X} = X(1+X+X^2+o(X^2)) = X+X^2+X^3+o(X^3) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

**Exemple 14** À vous !

Cherchons un DA en  $+\infty$  de  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

3. Rappel : si un équivalent se présente sous la forme d'une somme, il n'a aucun intérêt en tant qu'équivalent !

**Méthode 1**

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}}.$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \Rightarrow \sqrt{1+x} &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{8x^2} + o\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) \end{aligned}$$

**Méthode 2**

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &\sim \sqrt{x} \quad \text{car } x+1 \sim x \text{ et par stabilité par } \cdot \frac{1}{2} \text{ de } \sim (\star) \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &\sim \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{d'après } (\star) \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}(\dots)} \\ &= \frac{x - (x+1)}{2\sqrt{x}(\dots)^2} \\ &\sim \frac{-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-1}{8x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

**Exercice 6.** Exercice très classique, variantes dans la feuille de TD :

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , l'équation  $x + \ln(x) = n$  a une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , notons-la  $x_n$ .
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de  $(x_n)_{n \geq 0}$ .